Relación 1. Espacios normados. Conceptos básicos
Sugerencias para los ejercicios

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Universidad de Granada

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.
Está claro que en un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado toda cadena tiene un mayorante (y un minorante).

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.
Está claro que en un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado toda cadena tiene un mayorante (y un minorante). Por tanto podría aplicarse el Lema de Zorn pero eso sería algo así como matar moscas a cañonazos.

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.
Está claro que en un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado toda cadena tiene un mayorante (y un minorante). Por tanto podría aplicarse el Lema de Zorn pero eso sería algo así como matar moscas a cañonazos.Se trata, claro está, de dar una demostración directa sin usar dicho Lema. Una idea puede ser la siguiente: tomamos un elemento $a_1 \in A$, si ese elemento es maximal hemos terminado, en caso contrario tiene que haber algún elemento estrictamente mayor $a_2 \in A$ con $a_1 < a_2$.

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.
Está claro que en un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado toda cadena tiene un mayorante (y un minorante). Por tanto podría aplicarse el Lema de Zorn pero eso sería algo así como matar moscas a cañonazos.Se trata, claro está, de dar una demostración directa sin usar dicho Lema. Una idea puede ser la siguiente: tomamos un elemento $a_1 \in A$, si ese elemento es maximal hemos terminado, en caso contrario tiene que haber algún elemento estrictamente mayor $a_2 \in A$ con $a_1 < a_2$.Ahora hacemos lo propio con a_2, etcétera.

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.
Está claro que en un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado toda cadena tiene un mayorante (y un minorante). Por tanto podría aplicarse el Lema de Zorn pero eso sería algo así como matar moscas a cañonazos.Se trata, claro está, de dar una demostración directa sin usar dicho Lema. Una idea puede ser la siguiente: tomamos un elemento $a_1 \in A$, si ese elemento es maximal hemos terminado, en caso contrario tiene que haber algún elemento estrictamente mayor $a_2 \in A$ con $a_1 < a_2$.Ahora hacemos lo propio con a_2, etcétera.

Otra idea es proceder por inducción sobre el número de elementos del conjunto A.

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.
Está claro que en un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado toda cadena tiene un mayorante (y un minorante). Por tanto podría aplicarse el Lema de Zorn pero eso sería algo así como matar moscas a cañonazos.Se trata, claro está, de dar una demostración directa sin usar dicho Lema. Una idea puede ser la siguiente: tomamos un elemento $a_1 \in A$, si ese elemento es maximal hemos terminado, en caso contrario tiene que haber algún elemento estrictamente mayor $a_2 \in A$ con $a_1 < a_2$.Ahora hacemos lo propio con a_2, etcétera.

Otra idea es proceder por inducción sobre el número de elementos del conjunto A.

Otra idea (más bonita para mi gusto) es la siguiente: para cada $x \in A$ sea $n(x) = \sharp\{a \in A, : x < a\}$ (número de elementos de A estrictamente mayores que x).

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.
Está claro que en un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado toda cadena tiene un mayorante (y un minorante). Por tanto podría aplicarse el Lema de Zorn pero eso sería algo así como matar moscas a cañonazos.Se trata, claro está, de dar una demostración directa sin usar dicho Lema. Una idea puede ser la siguiente: tomamos un elemento $a_1 \in A$, si ese elemento es maximal hemos terminado, en caso contrario tiene que haber algún elemento estrictamente mayor $a_2 \in A$ con $a_1 < a_2$.Ahora hacemos lo propio con a_2, etcétera.

Otra idea es proceder por inducción sobre el número de elementos del conjunto A.

Otra idea (más bonita para mi gusto) es la siguiente: para cada $x \in A$ sea $n(x) = \sharp\{a \in A, : x < a\}$ (número de elementos de A estrictamente mayores que x).Se trata de probar que hay algún $x \in A$ para el que $n(x) = 0$.

Ejercicio 1

Prueba que todo conjunto finito no vacío y parcialmente ordenado $(A, \leqslant)$ tiene algún elemento maximal.
Está claro que en un conjunto finito no vacío parcialmente ordenado toda cadena tiene un mayorante (y un minorante). Por tanto podría aplicarse el Lema de Zorn pero eso sería algo así como matar moscas a cañonazos.Se trata, claro está, de dar una demostración directa sin usar dicho Lema. Una idea puede ser la siguiente: tomamos un elemento $a_1 \in A$, si ese elemento es maximal hemos terminado, en caso contrario tiene que haber algún elemento estrictamente mayor $a_2 \in A$ con $a_1 < a_2$.Ahora hacemos lo propio con a_2, etcétera.

Otra idea es proceder por inducción sobre el número de elementos del conjunto A.

Otra idea (más bonita para mi gusto) es la siguiente: para cada $x \in A$ sea $n(x) = \sharp\{a \in A, : x < a\}$ (número de elementos de A estrictamente mayores que x).Se trata de probar que hay algún $x \in A$ para el que $n(x) = 0$.Considera el conjunto $\{n(x) : x \in A\}$.

Ejercicio 2

Prueba que en todo espacio normado $(X, \| \ \|)$ se verifica la desigualdad:

$$\big| \|x-y\| - \|z-u\| \big| \leqslant \|x-z\| + \|y-u\|$$

Deduce que

$$\big| \|x-z\| - \|z-y\| \big| \leqslant \|x-y\|, \quad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x \pm y\|$$

Interpreta geométricamente los resultados obtenidos y deduce que la norma $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua.

Ejercicio 3

Sea X un espacio normado. Prueba que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}} \qquad (x, y \in X \setminus \{0\})$$

Deduce que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos no nulos de X que no converge a cero, entonces la sucesión $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ también es de Cauchy.

Ejercicio 3

Sea X un espacio normado. Prueba que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leqslant \frac{2\|x-y\|}{\max\{\|x\|, \|y\|\}} \qquad (x, y \in X \setminus \{0\})$$

Deduce que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos no nulos de X que no converge a cero, entonces la sucesión $\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}$ también es de Cauchy.

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| = \frac{1}{\|x\|\|y\|} \big\| x\|y\| - y\|x\| \big\| =$$

$$= \frac{1}{\|x\|\|y\|} \big\| x\|y\| - y\|y\| + y\|y\| - y\|x\| \big\|$$

Si $\{x_n\}$ es de Cauchy ¿cómo es $\{\|x_n\|\}$?

Ejercicio 4

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Prueba que para todos $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ se verifica que $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

Ejercicio 4

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Prueba que para todos $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ se verifica que $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

La desigualdad $\|\alpha x + \beta y\| \leqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\|$ es evidente. Se trata de probar la desigualdad contraria $\|\alpha x + \beta y\| \geqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

Ejercicio 4

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Prueba que para todos $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ se verifica que $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

La desigualdad $\|\alpha x + \beta y\| \leqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\|$ es evidente. Se trata de probar la desigualdad contraria $\|\alpha x + \beta y\| \geqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

Para mayorar una norma hay que pensar en la norma de una diferencia porque sabemos que es mayor o igual que la diferencia de las normas.

Ejercicio 4

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Prueba que para todos $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ se verifica que $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

La desigualdad $\|\alpha x + \beta y\| \leqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\|$ es evidente. Se trata de probar la desigualdad contraria $\|\alpha x + \beta y\| \geqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

Para mayorar una norma hay que pensar en la norma de una diferencia porque sabemos que es mayor o igual que la diferencia de las normas.También debemos ponernos en situación de usar la hipótesis del ejercicio.

Ejercicio 4

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$ y supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Prueba que para todos $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ se verifica que $\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

La desigualdad $\|\alpha x + \beta y\| \leqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\|$ es evidente. Se trata de probar la desigualdad contraria $\|\alpha x + \beta y\| \geqslant \alpha\|x\| + \beta\|y\|$.

Para mayorar una norma hay que pensar en la norma de una diferencia porque sabemos que es mayor o igual que la diferencia de las normas.También debemos ponernos en situación de usar la hipótesis del ejercicio.

$$\|\alpha x + \beta y\| = \|\alpha x + \alpha y - \alpha y + \beta y\|$$

Ejercicio 5

Sea $(X\| \ \|)$ un espacio normado. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Existen vectores linealmente independientes, $x, y \in X$ tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

b) Existen vectores linealmente independientes, $u, v \in S_X$, tales que $\left\|\frac{u+v}{2}\right\| = 1$.

c) Existen vectores $u, v \in S_X$, con $u \neq v$, tales que el segmento $[u, v]$ está contenido en S_X.

Deduce de lo anterior que si la esfera S_X no contiene segmentos no reducidos a un punto, y x, y son vectores no nulos tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

Ejercicio 5

Sea $(X\| \ \|)$ un espacio normado. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a) Existen vectores linealmente independientes, $x, y \in X$ tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.
b) Existen vectores linealmente independientes, $u, v \in S_X$, tales que
$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| = 1.$$
c) Existen vectores $u, v \in S_X$, con $u \neq v$, tales que el segmento $[u, v]$ está contenido en S_X.
Deduce de lo anterior que si la esfera S_X no contiene segmentos no reducidos a un punto, y x, y son vectores no nulos tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, entonces $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

$a) \implies b) \implies c)$ es consecuencia directa del ejercicio anterior.

Ejercicio 5

Sea $(X\|\ \|)$ un espacio normado. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
a) Existen vectores linealmente independientes, $x,y\in X$ tales que $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$.
b) Existen vectores linealmente independientes, $u,v\in S_X$, tales que $\left\|\dfrac{u+v}{2}\right\|=1$.
c) Existen vectores $u,v\in S_X$, con $u\neq v$, tales que el segmento $[u,v]$ está contenido en S_X.
Deduce de lo anterior que si la esfera S_X no contiene segmentos no reducidos a un punto, y x,y son vectores no nulos tales que $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, entonces $x=\lambda y$ con $\lambda>0$.

$a)\Longrightarrow b)\Longrightarrow c)$ es consecuencia directa del ejercicio anterior.

$c)\Longrightarrow a)$ es bastante evidente una vez justifiques que los vectores u,v en c) son linealmente independientes.

Ejercicio 6

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$, y $r > 0, s > 0$. Prueba que:
a) $\overline{B}(x,r) \cap \overline{B}(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| \leqslant r+s$.
b) $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| < r+s$.
c) $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,s) \iff \|x-y\| \leqslant s-r$.

Ejercicio 6

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$, y $r > 0, s > 0$. Prueba que:
a) $\overline{B}(x,r) \cap \overline{B}(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| \leqslant r+s$.
b) $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| < r+s$.
c) $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,s) \iff \|x-y\| \leqslant s-r$.

a) La implicación $\Longrightarrow$ es evidente. Para probar la implicación $\Longleftarrow$ es lógico considerar un vector que esté en la frontera de una bola y en la recta que va del centro de una bola en la dirección hacia el centro de la otra.

Ejercicio 6

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$, y $r > 0, s > 0$. Prueba que:
a) $\overline{B}(x,r) \cap \overline{B}(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| \leqslant r+s$.
b) $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| < r+s$.
c) $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,s) \iff \|x-y\| \leqslant s-r$.

a) La implicación $\Longrightarrow$ es evidente. Para probar la implicación $\Longleftarrow$ es lógico considerar un vector que esté en la frontera de una bola y en la recta que va del centro de una bola en la dirección hacia el centro de la otra.Suponemos, claro es, que $\|x-y\| > r$ pues en otro caso no hay nada que probar.

Ejercicio 6

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$, y $r > 0, s > 0$. Prueba que:
a) $\overline{B}(x,r) \cap \overline{B}(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| \leqslant r+s$.
b) $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| < r+s$.
c) $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,s) \iff \|x-y\| \leqslant s-r$.

a) La implicación $\Longrightarrow$ es evidente. Para probar la implicación $\Longleftarrow$ es lógico considerar un vector que esté en la frontera de una bola y en la recta que va del centro de una bola en la dirección hacia el centro de la otra.Suponemos, claro es, que $\|x-y\| > r$ pues en otro caso no hay nada que probar.Considera el vector

$$z = x + r\frac{y-x}{\|y-x\|}$$

y acota $\|z-y\|$.

Ejercicio 6

Sea X un espacio normado, $x, y \in X$, y $r > 0, s > 0$. Prueba que:
a) $\overline{B}(x,r) \cap \overline{B}(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| \leqslant r+s$.
b) $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset \iff \|x-y\| < r+s$.
c) $\overline{B}(x,r) \subset \overline{B}(y,s) \iff \|x-y\| \leqslant s-r$.

a) La implicación $\Longrightarrow$ es evidente. Para probar la implicación $\Longleftarrow$ es lógico considerar un vector que esté en la frontera de una bola y en la recta que va del centro de una bola en la dirección hacia el centro de la otra.Suponemos, claro es, que $\|x-y\| > r$ pues en otro caso no hay nada que probar.Considera el vector

$$z = x + r\frac{y-x}{\|y-x\|}$$

y acota $\|z-y\|$.

b) La implicación $\Longrightarrow$ es evidente. Para probar la implicación $\Longleftarrow$ la idea es parecida a la anterior pero no podemos llegar a la frontera. Considera

$$z = x + \delta\frac{y-x}{\|y-x\|} \qquad (0 < \delta < r)$$

y acota $\|z-y\|$. Deberás considerar varias posibilidades para $\|x-y\|$.

Ejercicio 7

Prueba que en todo espacio normado se verifica que:
a) La adherencia de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada.
b) El interior de una bola cerrada es la correspondiente bola abierta.
c) El diámetro de una bola es igual al doble de su radio.

Ejercicio 7

Prueba que en todo espacio normado se verifica que:
a) La adherencia de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada.
b) El interior de una bola cerrada es la correspondiente bola abierta.
c) El diámetro de una bola es igual al doble de su radio.

a) La prueba directa es fácil pero también puedes obtenerlo como consecuencia del ejercicio 7 b).

Ejercicio 7

Prueba que en todo espacio normado se verifica que:
a) La adherencia de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada.
b) El interior de una bola cerrada es la correspondiente bola abierta.
c) El diámetro de una bola es igual al doble de su radio.

a) La prueba directa es fácil pero también puedes obtenerlo como consecuencia del ejercicio 7 b).

b) La prueba directa es fácil pero también puedes obtenerlo como consecuencia del ejercicio 7 c).

Ejercicio 7

Prueba que en todo espacio normado se verifica que:
a) La adherencia de una bola abierta es la correspondiente bola cerrada.
b) El interior de una bola cerrada es la correspondiente bola abierta.
c) El diámetro de una bola es igual al doble de su radio.

a) La prueba directa es fácil pero también puedes obtenerlo como consecuencia del ejercicio 7 b).

b) La prueba directa es fácil pero también puedes obtenerlo como consecuencia del ejercicio 7 c).

c) Puede probarse directamente de manera muy sencilla o deducirlo como consecuencia del punto a) y de algo más que es sabido.

Ejercicio 8

Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos de X. Prueba que:
a) Si A es abierto, entonces $A + B$ es abierto.
b) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A + B$ es cerrado.
Da un ejemplo de dos conjuntos cerrados en un espacio normado cuya suma no sea un conjunto cerrado.

Ejercicio 8

Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos de X. Prueba que:
a) Si A es abierto, entonces $A + B$ es abierto.
b) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A + B$ es cerrado.
Da un ejemplo de dos conjuntos cerrados en un espacio normado cuya suma no sea un conjunto cerrado.

a) Basta usar que las traslaciones son homeomorfismos.

Ejercicio 8

Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos no vacíos de X.
Prueba que:
a) Si A es abierto, entonces $A + B$ es abierto.
b) Si A es cerrado y B es compacto, entonces $A + B$ es cerrado.
Da un ejemplo de dos conjuntos cerrados en un espacio normado cuya suma no sea un conjunto cerrado.

a) Basta usar que las traslaciones son homeomorfismos.

b) Típico razonamiento usando sucesiones para caracterizar la adherencia y la compacidad de A.